文章编号:2096-9066(2024)02-0155-08 DOI:10.3969/j.issn.2096-9066.2024.02.019

基于终端观测条件反演非线性抛物型方程的辐射系数

张 涛,杜 乐,邓醉茶

(兰州交通大学 数理学院,兰州 730070)

摘要:研究了利用终端观测数据重构非线性热传导方程辐射系数的反演问题。与一般的抛物型方程不同的是,非线性热传导方程不仅具有非线性源项,而且边界也是非线性的。主要研究了一维逆问题的理论分析。对于多维情况,同样是适用的。基于最优控制框架,考虑到原问题的不适定性,首先将原问题转化为一个优化问题,在对原问题做估计的同时,证明了控制泛函极小值的存在性以及极值存在的必要条件。其次由于最优控制问题是非凸的,一般不存在全局唯一性,该解只在一些特殊条件下是局部唯一的。最后简单给出了解的稳定性分析。需要指出的是,一般情况下,参数识别是一个非线性反问题,即使其基本方程是一个线性方程。模型复杂性的增大,一方面使得该模型可以刻画更多的物理现象,另一方面也会给相应的分析带来更大的困难。因此,逆问题 P 的非线性程度,在某种意义上,要高于那些由线性方程控制的非线性程度,在复杂性方面也是如此。

关键词:反问题;非线性;抛物型方程;辐射系数

中图分类号:O175.29 **文献标志码**:A

Inversion of Radiation Coefficient in Nonlinear Parabolic Equation Based on Terminal Observation Condition

ZHANG Tao,DU Le,DENG Zuicha

(School of Mathematics and Physics,Lanzhou Jiaotong University,Lanzhou 730070,China)

Abstract:This article studies the inversion problem of reconstructing the radiation coefficient of a nonlinear heat conduction equation using terminal observation data. Different from the general parabolic equations,the nonlinear heat conduction equation not only has a nonlinear source term,but also boundary is nonlinear. Based on the optimal control framework,the original problem is first transformed into an optimization problem,and the existence and necessary conditions of the control functional minimum value are proved. Since the optimal control problem is generally non-convex and lacks global uniqueness,which is common in optimization control problems,this article proves that the solution is locally unique. Finally,the stability analysis of the solution is given. It should be pointed out that,in general,parameter identification is a nonlinear inverse problem,even if the basic equation is a linear equation. The increase of the complexity of the model,on the other hand,will bring greater difficulties to the corresponding analysis. Therefore,the nonlinear degree of the inverse problem P is,in a sense,higher than that of those controlled by linear equations,and in terms of complexity.

Key words:inverse problem; nonlinear; parabolic equation; radiation coefficient

偏微分方程[1]作为应用数学和纯粹数学的一个重要分支,在很多方面都起着至关重要的作用,例如

收稿日期:2023-09-01

基金项目:国家自然科学基金(61663018,11961042);甘肃省自然科学基金(22JR5RA341)

第一作者:张 涛(1998-),男,宁夏固原人,硕士研究生,主要研究方向为数学物理反问题。E-mail:m18509537640@163.com

通讯作者:邓醉茶(1978-),男,湖南衡阳人,教授,主要研究方向为数学物理反问题、金融数学。E-mail:z_cdeng78@hotmail.com

在军事领域的精确制导、卫星定位、雷达探测等；工业工程中的声纳探测、石油勘探、天气预报等；在医疗领域的X光片、CT机等中都有着不可代替的作用。而偏微分方程反问题[2]更是其中亟需发展的学科，与正问题相比，大多数反问题都是不适定的[3]，这是由多种因素造成的，也大大增加了反演工作的难度。

近年来，抛物型方程系数反问题[4-6]的研究得到了一系列重要的成果。例如文献[7]中对期权定价中Black-Scholes方程的波动率进行了识别：

$$C_t+\frac{1}{2}\sigma^2S^2C_{ss}+(r-q)SC_s-rC=0,$$

其中：r是无风险利率，q是红利率，C是期权价格，σ是隐含波动率。文献[8]中，使用Tikhonov正则化方法，对有源项的热传导方程：

$$u_t-\nabla(q(x)\nabla u)=f(x,t)$$

的系数$q(x)$，进行了稳定性和收敛性的分析。文献[9]也利用Tikhonov正则化方法，研究了Laplace型方程的未知系数在Dirichlet问题中的收敛性。在文献[10-11]中，对依赖时间t的情况$u_t-\Delta u+q(t)u=0,(x,t)\in Q$，进行了广泛的研究。在文献[12]中，作者对如下方程：

$$u_t-\Delta u+q(x)u=0,(x,t)\in Q,$$

使用迭代不动点投影法得到了数值解。文献[13]利用全变差正则化方法对如下方程：

$$u_t-\Delta u=f(x),(x,t)\in[0,l]\times[0,T],$$

的源项进行了讨论，得到了最优解的存在性、唯一性和稳定性。

可以看出文献[7-13]中所研究的方程较为简单，多为不含源项或是含线性源项的热传导方程，且边界条件多为简单的第一类边界条件，而本文研究了在给出终端观测数据时识别非线性抛物方程辐射系数的反问题，在方程为非线性的情况下，同时边界条件也是更加复杂的非线性边界，该问题在应用科学等领域具有重要的价值，应用更加的广泛。该问题可以用以下形式进行描述：

问题P　考虑如下非线性抛物方程初边值问题：

$$\begin{cases} u_t-(a(x)u_x)_x+q(x)u=f(u), & (x,t)\in Q=\Omega\times(0,T] \\ u(x,0)=u_0(x), & x\in(0,l) \\ -u_x(0,t)+b_1(u)=0, & t\in(0,T] \\ u_x(l,t)+b_2(u)=0, & t\in(0,T] \end{cases}\tag{1}$$

其中：$a(x)$，$u_0(x)$是给定区间$(0,l)$上的光滑函数，且$0\leqslant a(x)\leqslant M$，$q(x)$是方程中的未知系数，假设给定终端时刻数据

$$u(x,T)=g(x),x\in(0,l)\tag{2}$$

需要根据方程(1)和条件(2)来确定未知函数u和q。

问题P显然是不适定的，因为观测数据的微小扰动会导致解的巨大变化。而最优控制方法是处理不适定问题的有力工具，在偏微分方程反问题领域，尤其是终端控制问题[14-16]方面有很多的应用。需要指出的是，一般情况下，参数识别是一个非线性反问题，即使基本方程是一个线性方程。然而，本文所讨论的数学模型不仅具有非线性源项，而且边界条件也是非线性的。模型复杂性的增大，一方面使得该模型可以刻画更多的物理现象，另一方面也会给相应的分析带来更大的困难。因此，逆问题P的非线性程度，在某种意义上，要高于那些由线性方程控制的非线性程度，在复杂性方面也是如此。

1　最优控制问题

本文中，假设$u_0(x)\geqslant 0$，$u_0(x)\in C^{2,\alpha}[0,l]$，$0<\alpha<1$，由极值原理[17]知$\|u\|_\infty\leqslant C$，记$\Phi=\max\limits_{x\in[0,l]}|u(x)|$。

在问题P中，假设：

1）函数$f\in C^2[0,\Phi]$，并且满足Lipschitz条件：

$$\exists L>0,\ |f(u_1)-f(u_2)|\leqslant L|u_1-u_2|,$$

以及$f(0)=0$，$|f'|$，$|f''|\leqslant M$。

2）函数$b_i\in C^2[0,\Phi]$，并且满足Lipschitz条件：

$$\exists L>0,\ |b_i(u_1)-b_i(u_2)|\leqslant L_i|u_1-u_2|,\ (i=1,2),$$

以及$b_i(0)=0,(i=1,2)$，$b_i'(x)\geqslant\delta_i\geqslant 0$，$|b_i''|\leqslant M$，其中$\delta_i$，$M$为常数。

考虑到原问题的不适定性，以及对于一般观测数据$g(x)$，问题P可能没有解，转而考虑以下最优控制问题P1。

问题P1　找到$\tilde{q}(x)\in A$，使得

$$J(\tilde{q})=\min_{q\in A}J(q),\tag{3}$$

其中：

$$J(q)=\frac{1}{2}\int_0^l |u(x,T;q)-g(x)|^2\mathrm{d}x+\frac{N}{2}\int_0^l |\nabla q|^2\mathrm{d}x \tag{4}$$

$$A=\{q(x)\mid 0<\alpha_0\leqslant q\leqslant\alpha_1,\nabla q\in L^2(0,l)\} \tag{5}$$

其中:$N>0$(N 为正则化参数),$u(x,t;q)$ 是方程(1)对应于任意给定的系数 $q(x)\in A$ 的解。其中 α_0,α_1 是两个给定的正常数,假设终端观测数据 $g(x)$ 满足:

$$g(x)\in L^2(0,l) \tag{6}$$

因此,正问题是由已知的系数 $q(x)$,确定式(1)的解 $u(x,t)$。本文对 $u(x,t)$ 有以下估计。

引理 1.1　设 $u(x,t)$ 为式(1)的解,$q(x)\in A$ 是给定函数,则对于 $u(x,t)$ 有以下估计:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^l u^2\mathrm{d}x+\int_0^t\int_0^l |u_x|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C\int_0^l u_0^2\mathrm{d}x$$

其中:C 是常数。

证明　方程(1)中,有 $0\leqslant t\leqslant T$,现对方程(1)两边同时乘以 u 并积分得,

$$\int_0^t\int_0^l uu_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^t\int_0^l u(a(x)u_x)_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_0^l qu^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^t\int_0^l uf(u)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

其中:

$$\int_0^t\int_0^l f(u)u\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\int_0^t\int_0^l |f(u)-f(0)\|u|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\int_0^t\int_0^l L|u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

由分部积分得

$$\int_0^t\int_0^l u_tu\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^t(u^2)_t\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^l u^2|_{(x,t)}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^l u_0^2\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^t\int_0^l u(a(x)u_x)_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^t\int_0^l(au_xu)_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^t\int_0^l au_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^t a(l)u_x(l,t)u(l,t)\mathrm{d}t-\int_0^t a(0)u_x(0,t)u(0,t)\mathrm{d}t-\int_0^t\int_0^l au_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\int_0^t a(l)b_2(u)u(l,t)\mathrm{d}t-\int_0^t a(0)b_1(u)u(0,t)\mathrm{d}t-\int_0^t\int_0^l au_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

注意到

$$b_i(u)=b_i(0)+b_i'(\xi_i)u,i=1,2$$

于是

$$\int_0^t\int_0^l u(a(x)u_x)_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\int_0^t a(l)b_2'(\xi_2)u^2(l,t)\mathrm{d}t-\int_0^t a(0)b_1'(\xi_1)u^2(0,t)\mathrm{d}t-\int_0^t\int_0^l au_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

所以有

$$\frac{1}{2}\int_0^l u^2|_{(x,t)}\mathrm{d}x+\int_0^t\int_0^l au_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_0^l qu^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t a(l)\delta_2u^2(l,t)\mathrm{d}t+\int_0^t a(0)\delta_1u^2(0,t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2}\int_0^l u_0^2\mathrm{d}x+\int_0^t\int_0^l L|u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

因此,由 Gronwall 不等式[19]可以得到

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^l u^2\mathrm{d}x+\int_0^t\int_0^l |u_x|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C\int_0^l u_0^2\mathrm{d}x$$

这就完成了引理 1.1 的证明。

2　存在性

定理 2.1　存在一个 $J(q)$ 的最小元 $\tilde{q}\in A$,即

$$J(\tilde{q})=\min_{q\in A}J(q)$$

证明　设(u_n,q_n)是一个最小化序列,即

$$\inf_{q\in A}J(q)\leqslant J(q_n)\leqslant\inf_{q\in A}J(q)+\frac{1}{n},n=1,2,\cdots$$

由于 $J(q_n)\leqslant C$ 以及 J 的特殊结构,有

$$\|\nabla q_n\|_{L^2(0,l)}\leqslant C(C\text{ 与 }n\text{ 无关})。$$

利用 Sobolev 嵌入定理[20],可得到

$$\|q_n\|_{C^{\frac{1}{2}}(0,l)}\leqslant C$$

所以

$$\|u_n(x,t)\|_{C^{2+\frac{1}{2},1+\frac{1}{4}}(Q)}\leqslant C\ (C\text{ 与 }n\text{ 无关})。$$

因此可以选择一个 q_n 和 u_n 的子序列,同样用 q_n 和 u_n 表示,这样就有

$q_n(x)\rightarrow\tilde{q}(x)\in C^{\frac{1}{2}}(0,l)$,一致收敛于 $C^\alpha(0,l)(0<\alpha\leqslant\frac{1}{2})$,

$u_n(x,t)\rightarrow\tilde{u}(x,t)$,一致收敛于 $C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q})\cap C_{\mathrm{loc}}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(Q)$

根据上面式子可以很容易验证$(q_n,u_n(x,t))$满足式(1),通过 Lebesgue 控制收敛定理[21],以及 L^2 范数的弱半连续性可推得:

$$J(\tilde{q})\leqslant\lim_{n\to\infty}\inf J(q_n)=\min_{q\in A}J(q)$$

故 $J(\tilde{q})=\min\limits_{q\in A}J(q)$。

这就完成了定理的证明。

3　必要条件

定理 3.1　设 q 是最优控制问题(3)的解,那么对于任意的 $h\in A$,有

$$\int_0^l[u(x,T;q)-g(x)]\xi(x,T)\mathrm{d}x+N\int_0^l\nabla q\cdot\nabla(h-q)\mathrm{d}x\geqslant 0 \tag{7}$$

其中 $\xi(x,t)$ 满足如下系统：

$$\begin{cases}\xi_t-(a(x)\xi_x)_x+q(x)\xi=-(h-q)u+\xi f'(u),\\ (x,t)\in\Omega\times(0,T]\\ \xi(x,0)=0\\ \xi_x(0,t)=\xi b_1'(u)\\ \xi_x(l,t)=-\xi b_2'(u)\end{cases} \tag{8}$$

证明 对于任意的 $h\in A, 0\leqslant\delta\leqslant 1$，令

$$q_\delta=(1-\delta)q+\delta h\in A$$

则

$$J_\delta=J(q_\delta)=\frac{1}{2}\int_0^l|u(x,T;q_\delta)-g(x)|^2+\frac{N}{2}\int_0^l|\nabla q_\delta|^2\mathrm{d}x \tag{9}$$

令 u_δ 是方程(1)的解，其中 $q=q_\delta$，从而有

$$\frac{\mathrm{d}J_\delta}{\mathrm{d}\delta}|_{\delta=0}=\int_0^l[u(x,T;q)-g(x)]\frac{\partial u}{\partial\delta}|_{\delta=0}\mathrm{d}x+N\int_0^l\nabla q\cdot\nabla(h-q)\mathrm{d}x\geqslant 0 \tag{10}$$

令 $\tilde{u}_\delta=\dfrac{\partial u}{\partial\delta}$，方程(1)直接计算可得以下方程：

$$\begin{cases}u_{\delta t}-(a_\delta u_{\delta x})_x+q_\delta\tilde{u}_\delta+(h-q)u_\delta=\tilde{u}_\delta f'(u_\delta)\\ \tilde{u}_\delta(x,0)=0\\ \tilde{u}_{\delta x}(0,t)=\tilde{u}_\delta b_1'(u_\delta)\\ \tilde{u}_{\delta,x}(l,t)=-\tilde{u}_\delta b_2'(u_\delta)\end{cases} \tag{11}$$

令 $\xi=\tilde{u}|_{\delta=0}$，则 ξ 满足：

$$\begin{cases}\xi_t-(a\xi_x)_x+q\xi+(h-q)u=\xi f'(u)\\ \xi(x,0)=0\\ \xi_x(0,t)=\xi b_1'(u)\\ \xi_x(l,t)=-\xi b_2'(u)\end{cases} \tag{12}$$

所以可以得到

$$\int_0^l[u(x,T;q)-g(x)]\xi(x,T)\mathrm{d}x+N\int_0^l\nabla q\cdot\nabla(h-q)\mathrm{d}x\geqslant 0$$

这就完成了定理3.1的证明。

4 局部唯一性

最优控制问题(3)是非凸的，一般没有全局唯一性，这在优化控制问题中是较为常见的。然而，如果 T 相对较小，则可以证明该解是局部唯一的。

假设 $q_1(x)$ 和 $q_2(x)$ 是最优控制问题P1的两个最小化子，

令

$$u_1-u_2=U,\ \xi_1+\xi_2=\Xi,\ q_1-q_2=Q$$

则 U 和 Ξ 满足

$$\begin{cases}U_t-(aU_x)_x+q_1U=-Qu_2+f(u_1)-f(u_2)\\ U(x,0)=0\\ U_x(0,t)=b_1(u_1)-b_1(u_2)\\ U_x(l,t)=-(b_2(u_1)-b_2(u_2))\end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases}\Xi_t-(a\Xi_x)_x+q_1\Xi=Q\xi_2+QU+\xi_1f'(u_1)+\xi_2f'(u_2)\\ \Xi(x,0)=0\\ \Xi_x(0,t)=\xi_1b_1'(u_1)+\xi_2b_1'(u_2)\\ \Xi_x(l,t)=-\xi_1b_2'(u_1)-\xi_2b_2'(u_2)\end{cases} \tag{14}$$

当 $q=q_2$ 时，取 $h=q_1$，则 ξ_2 满足

$$\begin{cases}\xi_{2t}-(a\xi_{2x})_x+q_2\xi_2=-Qu_2+\xi_2f'(u_2)\\ \xi_2(x,0)=0\\ \xi_{2x}(0,t)=\xi_2b_1'(u_2)\\ \xi_{2x}(l,t)=-\xi_2b_2'(u_2)\end{cases} \tag{15}$$

引理4.1 对于任何连续有界函数 $g(x)\in C(0,l)$，有

$$\max_{(0,l)}|g(x)|\leqslant|g(x_0)|+\sqrt{l}\left(\int_0^l|\nabla g|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \tag{16}$$

证明 对于任意的 $0<x<l$，有

$$|g(x)|\leqslant|g(x_0)|+\left|\int_{x_0}^x g'\mathrm{d}x\right|\leqslant|g(x_0)|+\left(\int_0^l 1\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^l|\nabla g|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

这就完成了引理4.1的证明。

引理4.2 对于式(13)，有如下估计

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^l U^2\mathrm{d}x\leqslant C\max|Q|^2\int_0^T\int_0^l|u_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{17}$$

其中：C 与 T 无关。

证明 $\exists\, 0\leqslant\theta\leqslant 1$，

$$f(u_1)-f(u_2)=f'(u_2+\theta(u_1-u_2))(u_1-u_2)=f'(u_2+\theta U)U\leqslant MU$$

对于方程(13)，有 $0<t\leqslant T$

$$\int_0^t\int_0^l UU_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^t\int_0^l U(aU_x)_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_0^l q_1U^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_0^l UQu_2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^t\int_0^l f'(u_2+\theta U)U^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

由分部积分可得

$$\int_0^t\int_0^l U(aU_x)_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^t\int_0^l(aU_xU)_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^t$$

$$\int_0^l aU_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\int_0^t a(l)(b_2(u_1)-b_2(u_2))U(l,t)\mathrm{d}t-\int_0^t a(0)(b_1(u_1)-b_1(u_2))U(0,t)\mathrm{d}t-\int_0^t\int_0^l aU_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

注意到

$$b_i(u_1)-b_i(u_2)=b_i'(\xi_i)(u_1-u_2)=b_i'(\xi_i)U$$

于是

$$\int_0^t\int_0^l U(aU_x)_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^t a(l)b_2'(\xi_2)U^2(l,t)\mathrm{d}t-\int_0^t a(0)b_1'(\xi_1)U^2(0,t)-\int_0^t\int_0^l aU_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

再由 b_i' 的非负性知

$$\frac{1}{2}\int_0^l U^2|_{(x,t)}\mathrm{d}x+\int_0^t\int_0^l aU_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\alpha_0\int_0^t\int_0^l U^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C\max|Q|^2\int_0^t\int_0^l(u_2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+C\int_0^t\int_0^l U^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

因此由 Gronwall 不等式可以得到

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^l U^2\mathrm{d}x+\int_0^T\int_0^l|U_x|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C\max|Q|^2\int_0^T\int_0^l|u_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

引理获证。

引理 4.3　假设有如下估计

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^l\xi_2^2\mathrm{d}x\leqslant C\max|Q|^2\int_0^T\int_0^l|u_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\tag{18}$$

其中:常数 C 与 T 无关。

证明　类比引理 4.2 的证明,对于方程(15),有

$$\int_0^t\int_0^l\xi_2\xi_{2t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^t\int_0^l\xi_2(a\xi_{2x})_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_0^l q_2\xi_2^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\int_0^t\int_0^l\xi_2Qu_2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_0^l\xi_2^2f'(u_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

由分部积分得

$$\frac{1}{2}\int_0^l\xi_2^2|_{(x,t)}\mathrm{d}x-\int_0^t\int_0^l(a\xi_{2x},\xi_2)_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_0^l q_2\xi_2^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_0^l a\xi_{2x}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\int_0^t\int_0^l\xi_2Qu_2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_0^l\xi_2^2f'(u_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

其中

$$\int_0^t\int_0^l(a\xi_{2x}\xi_2)_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^t a(l)\xi_{2x}(l,t)\xi_2(l,t)\mathrm{d}t-\int_0^t a(0)\xi_{2x}(0,t)\xi_2(0,t)\mathrm{d}t-\int_0^t\int_0^l a\xi_{2x}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\int_0^t a(l)b_2'(u_2)\xi_2^2(l,t)\mathrm{d}t-\int_0^t a(0)b_1'(u_1)\xi_2^2(0,t)\mathrm{d}t-\int_0^t\int_0^l a\xi_{2x}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

所以有

$$\frac{1}{2}\int_0^l\xi_2^2|_{(x,t)}\mathrm{d}x+\int_0^t\int_0^l a\xi_{2x}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\alpha_0\int_0^t\int_0^l\xi_2^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C(\max|Q|)^2\int_0^t\int_0^l(u_2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+C\int_0^t\int_0^l\xi_2^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

因此由 Gronwall 不等式可以得到

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^l\xi_2^2\mathrm{d}x+\int_0^T\int_0^l|\xi_{2x}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C\max|Q|^2\int_0^T\int_0^l|u_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

引理 4.3 证毕。

引理 4.4　对于方程(14)有如下估计

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^l\Xi^2\mathrm{d}x\leqslant C\max|Q|^4\int_0^T\int_0^l|u_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\tag{19}$$

其中:常数 C 与 T 无关。

证明　通过类比引理 4.2,有

$$\int_0^t\int_0^l\Xi\Xi_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^t\int_0^l\Xi(a\Xi_x)_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_0^l q_1\Xi^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\int_0^t\int_0^l\Xi Q\xi_2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_0^l\Xi QU\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_0^l\Xi\xi_1f'(u_1)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_0^l\Xi\xi_2f'(u_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

由分部积分得

$$\int_0^t\int_0^l\Xi(a\Xi_x)_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^t a(l)\Xi_x(l,t)\Xi(l,t)\mathrm{d}t-\int_0^t a(0)\Xi_x(0,t)\Xi(0,t)\mathrm{d}t-\int_0^t\int_0^l a\Xi_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\int_0^t a(l)[\xi_1b_2'(u_1)+\xi_2b_2'(u_2)]\Xi(l,t)\mathrm{d}t-\int_0^t a(0)[\xi_1b_1'(u_1)+\xi_2b_1'(u_2)]\Xi(l,t)\mathrm{d}t-\int_0^t\int_0^l a\Xi_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=$$

$$-\int_0^t a(l)[\xi_1b_2'(u_1)+\xi_2b_2'(u_1)-\xi_2b_2'(u_1)+\xi_2b_2'(u_2)]\Xi(l,t)\mathrm{d}t-\int_0^t a(0)[\xi_1b_1'(u_1)+\xi_2b_1'(u_1)-\xi_2b_1'(u_1)+\xi_2b_1'(u_2)]\Xi(0,t)\mathrm{d}t-\int_0^t\int_0^l a\Xi_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=$$

$$-\int_0^t a(l)b_2'(u_1)\Xi^2(l,t)\mathrm{d}t-\int_0^t a(l)\xi_2[b_2'(u_2-b_2'(u_1))]\Xi(l,t)\mathrm{d}t-\int_0^t a(0)b_1'(u_1)\Xi^2(0,t)\mathrm{d}t-\int_0^t a(0)\xi_2[b_1'(u_2)-b_1'(u_1)]\Xi(0,t)\mathrm{d}t-\int_0^t\int_0^l a\Xi_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=$$

$$-\int_0^t a(l)b_2'(u_1)\Xi^2(l,t)\mathrm{d}t-\int_0^t a(l)\xi_2[b_2''(u_2+\theta U)(-U)]\Xi(l,t)\mathrm{d}t-\int_0^t a(0)b_1'(u_1)\Xi^2(0,t)\mathrm{d}t-\int_0^t a(0)\xi_2[b_1''(u_2+\theta U)(-U)]\Xi(0,t)\mathrm{d}t-\int_0^t\int_0^l a\Xi_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

与此同时

$$\int_0^t\int_0^l \Xi\xi_1 f'(u_1)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_0^l \Xi\xi_2 f'(u_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^t\int_0^l \Xi(\xi_1 f'(u_1)+\xi_2 f'(u_1))\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_0^l \Xi(\xi_2 f'(u_2)-\xi_2 f'(u_1))\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^t\int_0^l \Xi^2 f'(u_1)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_0^l \Xi\xi_2[f''(u_2+\theta U)(-U)]\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

利用Gronwall不等式以及 $b_i'\geqslant\delta_i\geqslant 0, b_i'', f', f''$ 的有界性，可得：

$$\frac{1}{2}\int_0^l \Xi^2\mathrm{d}x+\int_0^t a(l)b_2'(u_1)\Xi^2(l,t)\mathrm{d}t+\int_0^t a(0)b_1'(u_1)\Xi^2(0,t)\mathrm{d}t+\int_0^t\int_0^l a\Xi_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_0^l q_1\Xi^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C\max|Q|^2\left(\int_0^T\int_0^l|\xi_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_0^l|u_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)+C\int_0^t\int_0^l \Xi^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

证明过程使用了引理4.2和4.3。

所以有

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^l \Xi^2\mathrm{d}x\leqslant C\max|Q|^2\left(\int_0^T\int_0^l|\xi_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_0^l|u_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)\tag{20}$$

根据式(17)，(18)及(20)就能证得结论。

定理4.5　假设 $q_1(x), q_2(x)$ 是最优化问题(3)的两个最小化子。如果存在一个点 x_0，使得

$$q_1(x_0)=q_2(x_0)$$

则对于相对较小的 T 及任意的 $x\in(0,l)$，有

$$q_1(x)=q_2(x)$$

证明　在式(7)中，当 $q=q_1$ 时，取 $h=q_2$；当 $q=q_2$ 时，取 $h=q_1$，则有

$$\int_0^l[u_1(x,T)-g(x)]\xi_1(x,T)\mathrm{d}x+N\int_0^l\nabla q_1\cdot\nabla(q_2-q_1)\mathrm{d}x\geqslant 0\tag{21}$$

$$\int_0^l[u_2(x,T)-g(x)]\xi_2(x,T)\mathrm{d}x+N\int_0^l\nabla q_2\cdot\nabla(q_1-q_2)\mathrm{d}x\geqslant 0\tag{22}$$

其中 $\{u_i,\xi_i\}$，$(i=1,2)$ 分别是 $q=q_i(i=1,2)$ 和 $h=q_j(j=2,1)$ 时方程(1)和(8)的解，则根据式(21)和(22)有

$$N\int_0^l|\nabla(q_1-q_2)|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_0^l[u_1(x,T)-g(x)]\xi_1(x,T)\mathrm{d}x+\int_0^l[u_2(x,T)-g(x)]\xi_2(x,T)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^l[u_1(x,T)-g(x)]\xi_1(x,T)\mathrm{d}x+\int_0^l[u_1(x,T)-g(x)]\xi_2(x,T)\mathrm{d}x+\int_0^l[u_2(x,T)-g(x)]\xi_2(x,T)\mathrm{d}x-\int_0^l[u_1(x,T)-g(x)]\xi_2(x,T)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^l[u_1(x,T)-g(x)]\Xi(x,T)\mathrm{d}x-\int_0^l U(x,T)\xi_2(x,T)\mathrm{d}x\tag{23}$$

根据引理4.1及定理4.5的假设，有

$$\max|Q|\leqslant\sqrt{l}\left(\int_0^l|\nabla Q|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\tag{24}$$

根据式(23)和(24)以及Hölder不等式有

$$N\int_0^l|\nabla(q_1-q_2)|^2\mathrm{d}x\leqslant C\sqrt{\int_0^l\Xi^2(x,T)\mathrm{d}x}+C\sqrt{\int_0^l U^2(x,T)\mathrm{d}x}\sqrt{\int_0^l|\xi_2(x,T)|^2\mathrm{d}x}\tag{25}$$

所以从式(24)，(25)以及引理4.2～引理4.4可以得到

$$N\int_0^l|\nabla(q_1-q_2)|^2\mathrm{d}x\leqslant C\max|Q|^2\left(\sqrt{\int_0^T\int_0^l|u_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t}+\sqrt{\int_0^T\int_0^l|u_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t}+\sqrt{\int_0^T\int_0^l|u_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t}\right)\tag{26}$$

由引理4.1知

$$\int_0^T\int_0^l|u_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant CT\int_0^l u_0^2\mathrm{d}x\leqslant CT$$

从而根据式(24)，(26)有

$$\int_0^l|\nabla Q|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{C(\sqrt{T}+T)}{N}\max|Q|^2\leqslant Cl\frac{\sqrt{T}}{N}\int_0^l|\nabla Q|^2\mathrm{d}x\tag{27}$$

其中：C 与 T 无关。

选择相对较小的 T，使得

$$Cl\frac{\sqrt{T}}{N}=\frac{1}{2}\tag{28}$$

结合式(27)及(28)就有

$$\nabla Q=0, x\in(0,l)\tag{29}$$

这意味着 $Q=q_1(x)-q_2(x)=0, x\in(0,l)$。

定理获证。

5　稳定性

假设真正的解 $g(x)$ 是可以实现的，即 $\exists q\in A$，使得 $u(x,T;q)=g(x)$，以及噪声水平为 δ，且满足

$$\|g_\delta(x)-g(x)\|_{L^2(0,l)}\leqslant\delta\tag{30}$$

其中观测数据是已知的。设 q^δ 为最优化问题P1中当 $g(x)$ 被 $g_\delta(x)$ 所取代时的一个最小化子，且 $\{u^\delta,\xi^\delta\}$ 是方程(1)和(8)中 q 和 $g(x)$ 被 q^δ 和 $g_\delta(x)$ 所取代

时的解。根据第 4 节中的唯一性,有 q^δ 是唯一的,当 T 相对较小时,本文将证明目标泛函的最小化子 L^2 的稳定性。

定义 5.1　如果

$$\| g_\delta(x) - g(x) \|_{L^2(0,l)} \to 0$$

有

$$\| q^\delta - q \|_{L^2(0,l)} \to 0$$

则称最优解 $q(x)$ 是 L^2 稳定的。

令

$$u^\delta - u = U^\delta, \xi^\delta + \xi = \Xi^\delta, q^\delta - q = Q^\delta$$

则 U^δ 和 Q^δ 满足

$$\begin{cases} U_t^\delta - (aU_x^\delta)_x + q^\delta U^\delta = -Q^\delta u + f(u^\delta) - f(u) \\ U^\delta(x,0) = 0 \\ U_x^\delta(0,t) = (b_1(u^\delta) - b_1(u)) \\ U_x^\delta(l,t) = -(b_2(u^\delta) - b_2(u)) \end{cases} \tag{31}$$

$$\begin{cases} \Xi_t^\delta - (a\Xi_x^\delta)_x + q^\delta \Xi^\delta = Q^\delta \xi + \xi^\delta f'(u^\delta) + \xi f'(u) \\ \Xi^\delta(x,0) = 0 \\ \Xi_x^\delta(0,t) = \xi^\delta b_1'(u^\delta) + \xi b_1'(u) \\ \Xi_x^\delta(l,t) = -\xi^\delta b_2'(u^\delta) - \xi b_2'(u) \end{cases} \tag{32}$$

引理 5.1　对于方程 U^δ 和 Ξ^δ 有如下估计

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^l (U^\delta)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C \max | Q^\delta |^2 \int_0^T \int_0^l | u |^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{33}$$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^l (\Xi^\delta)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C \max | Q^\delta |^4 \int_0^T \int_0^l | u |^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{34}$$

其中:C 与 T 无关。

证明　该证明类似于引理 4.2 和引理 4.4。

定理 5.2　设 $q(x)$,$q^\delta(x)$ 是最优控制问题对应 $g(x)$,$g_\delta(x)$ 的最小化子,则对于相对较小的 T 有以下估计

$$\max_{x\in(0,l)} | q^\delta - q | \leqslant C\sqrt{\frac{1}{N}} \| g_\delta - g \|_{L^2(0,l)}$$

其中:C 与 N,δ 无关。

证明　该证明的前一部分与定理 4.5 相似,从式(25)开始有

$$N \int_0^l | \nabla(q^\delta - q) |^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_0^l [u^\delta(x,T) - g_\delta(x)]\Xi^\delta(x,T)\mathrm{d}x - \int_0^l U^\delta(x,T)\xi(x,T)\mathrm{d}x + \int_0^l [g_\delta(x) - g(x)]\xi(x,T)\mathrm{d}x \leqslant C\sqrt{\int_0^l | \Xi^\delta(x,T) |^2 \mathrm{d}x} + C\sqrt{\int_0^l | U^\delta(x,T) |^2 \mathrm{d}x}\sqrt{\int_0^l | \xi(x,T) |^2 \mathrm{d}x} + C\int_0^l | \xi(x,T) |^2 \mathrm{d}x + C\int_0^l | g_\delta - g |^2 \mathrm{d}x \tag{35}$$

根据引理 4.1 及定理 4.5 有

$$\max | Q^\delta | \leqslant \sqrt{l}\left(\int_0^l | \nabla Q^\delta |^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \tag{36}$$

然后由引理 5.1 及式(35),(36),有

$$\max | Q^\delta |^2 \leqslant l \| \nabla Q^\delta \|_{L^2(0,l)} \leqslant Cl \frac{\sqrt{T} + T + T}{N} | Q^\delta |^2 + \frac{Cl}{N} \| g_\delta - g \|_{L^2(0,l)}^2 \tag{37}$$

选择相对较小的 T,使得

$$Cl \frac{\sqrt{T}}{N} = \frac{1}{2} \tag{38}$$

所以就有

$$\max_{x\in(0,l)} | q^\delta - q |^2 \leqslant \frac{Cl}{N} \| g_\delta - g \|_{L^2(0,l)}^2$$

从而定理获证。

备注 5.1　最优解的唯一性和稳定性取决于正则化参数 N 的选取,假设

$$N \to 0, \delta \to 0, \frac{\delta^2}{N} \to 0$$

则根据定理 5.2 有

$$\lim_{\delta\to 0} q^\delta = q$$

其中 q 是原问题 P 的解。

6　结论

确定抛物方程的系数问题,对许多科学家和工程师来说仍然是一个棘手的问题。困难是由于缺乏传统的稳定性、非线性及非凸性。本文在具有非线性源项和非线性边界的情况下,反演了抛物方程的辐射系数。在最优框架的基础上,将原问题转化为了一个优化问题,建立了控制泛函极小值的存在性和必要条件,并证明了在一定条件下的局部唯一性和稳定性。本文主要研究了一维逆问题的理论分析。对于多维情况,本文提出的方法也是适用的。应该提到的是,二维的情况可能对工程师来说更有兴趣,也更有帮助。然而,二维反问题的理论和数值处理比一维情况复杂得多。未来的工作将包括:1)最优解数值模拟的实现;2)从一些额外的条件,确定与空间和时间都相关的系数 $q(x,t)$,例如

$$u(x,t) = g^\delta(x,t), (x,t) \in Q$$

其中:g^δ 是包含误差的观测数据。

参考文献:

[1]　陆金甫,关治. 偏微分方程数值解法[M]. 2 版. 北京:

清华大学出版社,2004.
[2] 刘继军.不适定问题的正则化方法及应用[M].北京:科学出版社,2005.
[3] 姜礼尚,陈亚浙,刘西垣,等.数学物理方程讲义[M].3版.北京:高等教育出版社,2007.
[4] YANG L,DENG Z C. Uniqueness for an inverse source problem in degenerate parabolic equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2022,488(2):124095.
[5] CHENG J,LIU J J. An inverse source problem for parabolic equations with local measurements[J]. Applied Mathematics Letters,2020,103:106213.
[6] XU Z L,JIA X Y. The calibration of volatility for option pricing models with jump diffusion processes[J]. Applicable Analysis,2019,98(4):810-827.
[7] EGGER H,ENGL H W. Tikhonov regularization applied to the inverse problem of option pricing:convergence analysis and rates[J]. Inverse Problems,2005,21(3):1027-1045.
[8] ENGL H W,ZUO J. A new approach to convergence rate analysis of Tikhonov regularization for parameter identification in heat conduction[J]. Inverse Problems,2000,16:1907-1923.
[9] DINH N H,TRAN N T Q. Convergence rates for Tikhonov regularition of coefficient identification problems in Laplace-type equations[J]. Inverse Problems,2010,26:1-22.
[10] DEHGHAN M,TATARI M. Determination of a control parameter in a one-dimensional parabolic equation using the method of radial basis functions[J]. Mathematical and Computer Modelling,2006,44:1160-1168.
[11] DEHGHAN M. An inverse problems of finding a source parameter in a semilinear parabolic equation[J]. Applied Mathematical Modelling,2001,25:743-754.
[12] FATULLAYEV A G,CULA S. An iterative procedure for determining an unknown spacewise-dependent coefficient in a parabolic equation[J]. Applied Mathematics Letters,2009,22:1033-1037.
[13] 蔡超.一类 Kolmogorov 型方程的系数反演问题[J].山东大学学报(理学版),2016,51(4):127-134.
[14] 许瑶瑶,杨柳.非线性-积分抛物型方程零阶项的识别问题[J].兰州交通大学学报,2022,41(6):121-126.
[15] 任建龙,曾剑,甄苇苇.数值重构二阶抛物型方程的一阶项系数[J].兰州交通大学学报,2018,37(4):99-104.
[16] ISMAILOV M I,OĞUR B. An inverse diffusion problem with nonlocal boundary conditions[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations,2016,32(2):564-590.
[17] 周蜀林.偏微分方程[M].1版.北京:北京大学出版社,2005.
[18] 姜礼尚,孔德兴,陈志浩.应用偏微分方程讲义[M].北京:高等教育出版社,2008.
[19] 王元明,徐君祥.索伯列夫空间讲义[M].南京:东南大学出版社,2003.
[20] 程其襄,张奠宙,胡善文,等.实变函数与泛函分析基础[M].3版.北京:高等教育出版社,2010.

(责任编辑:赵冬艳)